MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a XII-a

Problema 1 (22,5p)

Se consideră mulțimea $G=\left\{A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{Z}_5, \det A(x,y)=\hat{1}\right\}$.

a) Determină elementele mulțimii G.

b) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

c) Demonstrați că grupul $(G,\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4,+)$.

Problema 2 (22,5p)

Fie funcția $f:(0,\infty)\to(0,2)$ definită prin $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ și legea de compoziție „$\circ$” definită pe $(0,2)$ prin $x\circ y=\dfrac{xy}{xy-x-y+2}$, unde $((0,\infty);\cdot)$ și $((0,2);\circ)$ sunt grupuri comutative.

a) Demonstrați că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,\infty)$.

b) Determinați $x\in(0,2)$ pentru care $x\circ x\circ x=\dfrac{4}{3}$.

Supliment Gazeta Matematică nr.10/2025

Problema 3 (22,5p)

Calculați:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{3\sin x+2\cos x}dx,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{2026+2025\sin 2x}}dx$.

Problema 4 (22,5p)

Calculați:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2^x}{2^{2x}-2^{x+1}+2}dx$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2^x+2^{1-x}-2}dx$.

NOTĂ: *Toate subiectele sunt obligatorii.*

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Din oficiu: 10p